Доповіді НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

10 • 1995

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

УДК 517.944

Т. О. БАРАБАШ, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ГРАНИЧНЫЙ РЕЖИМ, ГАРАНТИРУЮЩИЙ СТАБИЛИЗАЦИЮ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком НАН Украины Ю. Л. Далецким)

Изучаются решения $u(t, x)$ краевой задачи

$$\partial_t u(t,x) = -\partial_x^3 u(t,x),\ (t,x) \in E^2_{++} = \{(t, x): t > 0, x > 0\}, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1_+ = \{x : x > 0\}, \tag{2}$$

$$B(\partial_x)\, u|_{x=0} = g(t), t \in E^1_+ = (t, t > 0\}. \tag{3}$$

Здесь $B(\partial_x) = \sum\limits_{k=0}^{r} b_k \partial_x^k$, где b_k, $k = 0, \ldots, r$, — вещественные постоянные. Находится условие на многочлен $B(\lambda)$, гарантирующее стабилизацию ограниченных решений $u(t, x)$ задачи (1)—(3), построенных по произвольным стабилизирующим граничным функциям $g(t)$. Переходим к его формулировке.

Кубическое уравнение

$$\lambda^3 + p = 0,$$

где $p = |p|e^{i\varphi}$ — комплексный параметр, имеет три решения

$$\lambda_j(p) = |p|^{1/3} \exp\{i(\varphi+\pi)/3 + 2\pi(j-1)/3\},\quad j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Нас интересует та из функций $\lambda_j(p)$, которая при всех p из правой полуплоскости комплексной p-плоскости имеет отрицательную вещественную часть. Из формулы (4) непосредственно следует, что этим свойством обладает только функция $\lambda_2(p) = |p|^{1/3}\exp\{i(\pi + \varphi/3)\}$, значения которой (при $|\varphi| < \pi/2$) лежат в секторе $\arg \lambda_2(p) \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$. Определим теперь функцию $F(p) = B(\lambda_2(p)) = \sum\limits_{k=0}^{r} b_k (\lambda_2(p))^k$.

Условие α). Все нули функции $F(p)$ лежат в левой полуплоскости комплексной p-плоскости.

Условие α) означает, что нули многочлена $B(z)$ лежат в секторе $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ комплексной z-плоскости.

Центральным результаты работы является

Теорема 1. Для стабилизации ограниченных решений $u(t, x)$ задачи (1)—(3), построенных по произвольным стабилизирующимся граничным функциям $g(t)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие α).

Сформулированная задача была поставлена А. Н. Тихоновым [1]. Он ее решил для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной координаты. В этом же случае, но для модельного параболического по Петровскому уравнения произвольного порядка, это сделал Д. В. Прока [2]. Для модельных параболических уравнений и систем уравнений с любым числом пространственных координат задача рассматривалась в работах Я. С. Кущицкого и С. Д. Эйдельмана [3—6]. Подробное изложение развитой ими методики содержится в [7, гл. 7].

Наш интерес к уравнению (3) вызван его «физичностью», это линеаризованное уравнение Кортевега — де Фриза (см., например, [8], гл. 1), и тем, что граничные задачи для таких уравнений (корректных по Петровскому) принадлежат к числу мало исследованных.

При доказательстве теоремы 1 мы следовали схеме, изложенной в [7]. Однако уже на первом шагу исследования у нас, вместо обычной экспоненты, появилась функция Эйри и свойства этой функции существенно определили и те модификации в методах, которые нам потребовались.

1. Переходим к описанию наших рассуждений и полученной дополнительной информации о решениях задачи (1)—(3). Здесь и дальше через c и C будем обозначать (вообще говоря, различные) положительные постоянные. Ограниченные решения $u(t, x)$ задачи (1)—(3) представимы формулой

$$u(t,x)=\int_0^t G(t-\tau,x)\,g(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

где $G(t, x)$ — ядро Пуассона этой задачи. Функция $G(t, x)$ определяется равенством

$$G(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp\{pt+\lambda_2(p)\,x\}\frac{dp}{B(\lambda_2(p))}, \tag{6}$$

γ — достаточно большая положительная постоянная.

В наших дальнейших построениях особую роль играет ядро Пуассона задачи Дирихле

$$G_0(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp\{pt+\lambda_2(p)\,x\}\,dp. \tag{7}$$

Справедливо такое важное утверждение.

Теорема 2. Ядро Пуассона $G_0(t, x)$ задачи Дирихле для уравнения (1) определяется формулой

$$G_0(t,x)=3\,\frac{x}{(3t)^{4/3}}\,Ai\,(x\,(3t)^{-1/3}), \tag{8}$$

где $Ai(z)$ — функция Эйри (см. [9], с. 265, формула 10.4.2).

В дальнейшем используются свойства этой функции, в частности, что она экспоненциально убывает при $x\to+\infty$.

Переходим к изучению свойств ядер Пуассона $G(t, x)$. Из этих свойств почти непосредственно следует, что условие α) гарантирует стабилизацию ограниченных решений $u(t, x)$ изучаемой задачи, построенных по произвольным стабилизирующимся граничным функциям $g(t)$. Свойства $G(t, x)$ описаны в следующем предложении.

Теорема 3. Пусть выполнено α). Тогда ядро Пуассона $G(t, x)$ задачи (1)—(3) обладает свойствами:

1) при $t\in(0;\ 1]$ справедлива оценка

$$|G(t,x)|\leqslant Ct^{(r-1)/3}\exp\{-c\,(x\,(t)^{-1/3})^{3/2}\};$$

2) имеет место представление

$$G(t,x)=B(0)^{-1}G_0(t,x)+G_1(t,x),$$

где для функции $G(t, x)$ при $t\geqslant 1$ справедлива оценка

$$|G_1(t,x)|\leqslant Ct^{-4/3}\exp\{-c\,(|x|\,t^{-1/3})^{3/2}\};$$

3) интеграл $\int_0^\infty |G(t,x)|\,dt$ равномерно по x, $x\in(0;\infty)$, ограничен.

При доказательстве теоремы 3 использовалась методика [7].

Однако все этапы доказательства потребовали внесения необходимых корректив в рассуждения и вычисления.

Переходим к изложению теоремы о стабилизации.

Определение. Непрерывная на $[0;\infty)$ функция называется стабилизирующейся, если существует конечный предел g^0 функции $g(t)$ при $t\to\infty$.

Теорема 4. Предполагается выполненым условие α). Тогда решение $u(t, x)$ задачи (1)—(3), представимое формулой (4) и построенное по любой стабилизирующейся граничной функции, стабилизируется и справедливо равенство

$$\exists\lim_{t\to\infty}u(t,x)=g^0\int_0^\infty G(t,x)\,dt.$$

Теорема 4 непосредственно следует из теоремы 3 и утверждения из [1, с. 50—51]. Таким образом, доказана достаточность в теореме 1.

2. Опишем, как устанавливается тот факт, что если решения $u(t, x)$ задачи (1)—(3), представимые формулой (4), стабилизируются при любой стабилизирующейся граничной функции, то выполнено условие α). Так же, как в [2], с. 152—163, [7] с. 304—309, вначале устанавливается, что нули функции $F(p)$ не могут находится в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>0$. Затем последовательно опровергается возможность появления чисто мнимых нулей, отличных от $p=0$ и, наконец,

$p=0$. Предполагая наличие таких нулей, всякий раз предъявляется стабилизирующая граничная функция, для которой соответствующее решение не стабилизируется. Этим завершается доказательство теоремы 1.

3. Проиллюстрируем изложенные выше результаты некоторыми примерами.

Пример 1 (задача Дирихле). $B_1(\partial_x)\equiv 1$: $B_1(z)\equiv 1$, таким образом выполнено условие α). Решение задачи Дирихле $u_1(t, x)$, построенное по любой стабилизирующейся граничной функции $g_1(t)$, стабилизируется и [9, формула 10.4.82]

$$\exists \lim_{t\to\infty} u_1(t,x) = g_1^0 \int_0^\infty G_0(t,x)\,dt = g_1^0\cdot 3\int_0^\infty A_i(z)\,dz = g_1^0.$$

Пример 2. $B_2(\partial_x)=\sum_{k=1}^{r} b_k\partial_x^k : B_2(z)=\sum_{k=1}^{r} b_k z^k$ имеет нуль $z=0$, условие α) не выполнено. Эт значит, что есть стабилизирующиеся граничны функции $g_2(t)$, для которых решения $u_2(t, x)$, представимые формулой (4), не стабилизируются. Возникает задача о нахождении дополнительных условий на $g_2(t)$, выполнение которых гарантирует стабилизацию соответствующих им $u_2(t, x)$.

Пример 3. $B_3(\partial_x)\equiv b_2\partial_x^2+b_1\partial_x+b_0, b_0\neq$ $\neq 0 : B_3(z)=B_2z^2+b_1z+b_0$. Для выполнения условия α) необходимо и достаточно, чтобы нули многочлена $B_3(z)$ лежали в секторе $(-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ комплексной z-плоскости. В частности, при $b_2=0$ это значит, что $b_1b_0<0$. Если же $b_1=0$, то при любых b_2 и b_0, $b_2b_0<0$ условие α) не выполнено.

1. *Тихонов А. Н.* О краевых задачах, содержащих производные, превышающие порядок уравнения // Мат. сб., 1950.— **26**, № 1.— С. 35—36.
2. *Прока Д. В.* О стабилизации решения граничной задачи для параболического уравнения // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1973.— **126**.— С. 145—170.
3. *Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д.* О многомерном варианте задачи А. Н. Тихонова // Докл. АН СССР.— 1988.— **299**, № 5.— С. 1056—1059.
4. *Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д.* О стабилизации решений граничных задач для модельного параболического уравнения высокого порядка // Докл. АН УССР.— 1988. Сер. А.— № 1.— С. 18—21.
5. *Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д.* Стабилизация решений граничных задач для многомерного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 3.— С. 327—334.
6. *Кушицкий Я. С., Эйдельман С. Д.* Стабилизация решений граничных задач для параболических систем второго порядка // Докл. АН УССР.— 1990.— № 6.— С. 23—28.
7. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи.— Кишинев : Штиинца, 1992.— 328 с.
8. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М. : Наука, 1973.— 175 с.
9. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под редак. М. Абрамовица и И. Стиган.— М. : Наука, 1979.— 830 с.

Международный Соломонов университет, Киев
Национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев

Поступило 21.10.94

The following problem is studied:

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u, \quad u|_{t=0}=0, \quad B(\partial_x)\,u|_{x=0}=g(t). \qquad (1)$$

Necessary and sufficient conditions on the polynomial $B(\lambda)$, which guarantees stabilization of bounded solutions of (1), are found. The solutions are constructed on arbitrary stabilizing functions $g(t)$. Examples, which illustrate the general results, are presented.

УДК 517.923

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, Т. А. ПЕТРОВА

ОГРАНИЧЕННЫЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено академиком НАН Украины Ю. А. Митропольским)

В настоящей работе исследуется задача существования ограниченных и периодических решений операторного уравнения Риккати с коэффициентом — неограниченным оператором. Изучению матричного уравнения Риккати посвящено значительное число работ, ряд ссылок содержится в [1]. О связях операторного уравнения Риккати с теорией управления, фильтрации и другими современным приложениями см. работу [2]. Для уравнения Риккати с коэффициентами — ограниченными операторами в [1] доказано существование ограниченных и периодиче-